

Title	半単純対称空間の不変微分作用素環と普遍包絡環の中心 (等質空間と部分多様体の幾何学)
Author(s)	落合, 啓之
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1346: 80-90
Issue Date	2003-11
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/25068">http://hdl.handle.net/2433/25068</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

# 半単純対称空間の不変微分作用素環と 普遍包絡環の中心\*

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai)

名古屋大学多元数理科学研究科 (Nagoya University)

## 1 Introduction

$G/K$  を Riemann 対称空間とし、 $\mathbf{D}(G/K)$  をその上の  $G$  不変な微分作用素のなす  $\mathbf{C}$ -algebra とする。例えば、 $G = SO(n+1)$ ,  $K = SO(n)$  の場合は、対称空間  $G/K = S^n$  は球面である。このとき球面上のラプラシアンは  $G$  のカシミール元から来ることは良く知られている。カシミール元は  $G$  のリー環の複素化  $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1, \mathbf{C})$  の普遍包絡環  $U(\mathfrak{so}(n+1, \mathbf{C}))$  の 2 次の中心元である。一般にリー環  $\mathfrak{g}$  の元は  $G/K$  上のベクトル場を定め、それを延長することで普遍包絡環から  $G/K$  上の微分作用素環への  $\mathbf{C}$ -algebra 準同型

$$U(\mathfrak{so}(n+1, \mathbf{C})) \longrightarrow D_{S^n}$$

が得られる。この写像の両方の  $G$ -invariants を考えると

$$ZU(\mathfrak{so}(n+1, \mathbf{C})) \longrightarrow \mathbf{D}(S^n)$$

という普遍包絡環の中心から不変微分作用素環への  $\mathbf{C}$ -algebra 準同型が得られる。球面の場合は  $\mathbf{D}(S^n)$  はラプラシアンで生成されるので、ラプラシアンがカシミール元の像で書けることから、普遍包絡環の中心から不変微分作用素環への準同型が全射であることが従う。ここでの主題は、

**問題 1** 対称空間  $G/K$  に対して

$$ZU(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathbf{D}(G/K)$$

はいつ全射になるか？

---

\* 「等質空間と部分多様体の幾何学」2003.6.23–25.

この問題を考えはじめる前に、調和解析からの背景を述べておこう。

球面上の調和解析で基本となるのはラプラシアン  $\Delta = \Delta_{S^n}$  の固有関数  $\psi \in C^\infty(S^n)$

$$\Delta\psi = \lambda\psi$$

である。ここで  $\lambda \in \mathbb{C}$  は固有値である。ラプラシアンがカシミール元から来ていることから、 $\psi \in C^\infty(S^n)$  に関する上記の方程式は

$$C\psi = \lambda\psi$$

とも書き表わされる。ここで  $C$  はラプラシアンに移るように定数倍を調節したカシミール元である。

一般の対称空間  $G/K$  に対しても不変微分作用素環  $\mathbf{D}(G/K)$  は可換な  $\mathbb{C}$ -algebra であることが知られていて、同時固有関数という概念が意味を持ち、重要な役割を果たす：

$$D\psi = \lambda_D\psi \quad (\forall D \in \mathbf{D}(G/K), \exists \lambda_D \in \mathbb{C}).$$

$\psi \in C^\infty(G/K)$  が固有関数、 $\lambda_D$  は、微分作用素  $D$  に対応した固有値である。ここでもし、上の問題 1 の全射性が肯定的であれば、すなわち、不変微分作用素が全て普遍包絡環の中心から来るのであれば

$$C\psi = \mu_C\psi \quad (\forall C \in ZU(\mathfrak{g}), \exists \mu_C \in \mathbb{C}).$$

と特徴付けることもできる。表現論的にいえば、これは、無限小指標で特徴付けることと等価である。保型形式論においても、一変数の保型形式の定義では正則性やラプラシアンの固有関数で特徴付けできるが、多変数の保型形式の Harish-Chandra 流の定義では普遍包絡環の中心の固有関数であることを採用している。この 2 つにどのくらい差があるだろうか。実はそれほど大きな差はない。

対称空間上の不変微分作用素環の同時固有関数特に  $K$ -invariant な関数 (すなわち、帯球関数 zonal spherical function) を特徴付ける微分方程式は、超幾何型の種々の特殊関数と関係している。球面のように階数 1 であれば、ルジャンドル多項式などの一変数の超幾何関数が現れ、階数の高い対称空間に対しては多変数の超幾何関数が現れる。(制限) ルート系に付随した超幾何関数の一般化はいわゆる Sekiguchi-Heckman-Opdam の名前を冠されているが、現在でもわかっていないことが多く、研究が進んでいる途上である。これらの多変数の超幾何関数は数理物理における量子可積分系 (quantum complete integrable system) の一例ともなっていて、その拡張版 (差分化なども含む) の雛形でもある。リーマン対称空間の場合には一般論としては Helgason の研究や Helgason 予想の解決などでかなりなことが分かっている。一方で、実際に座標を使って微分方程式を書き下すなど、具体的な形を保型形式論などから要求されてもラプラシアンを越えるとなかなか難しい。普遍包絡環の中

心はまたさまざまな記述と不変性を持つので、少しは扱いやすい面がある。したがって、やや弱い条件である普遍包絡環の中心の固有関数という条件からどの程度のことが結論できるかを見てみたいということも上記の問題の動機となっている。まとめると、

**問題 2** 普遍包絡環の中心の同時固有関数は不変微分作用素環の同時固有関数になるか？

これが肯定的に成り立っているような空間  $G/K$  や固有値に対しては、普遍包絡環の中心 (一般カシミール元) の作用で不変微分作用素環の同時固有関数が特徴付けできることになる。例えば球関数はそうである。

## 2 問題の背景

まず、リーマン対称空間における不変微分作用素環の構造は局所同型で等しく、直積分解に応じてテンソル積に分解するのでリーマン対称空間は既約と仮定して良い。群多様体の場合は問題が易しく肯定的である。また、compact 型と non-compact 型のように同じ複素化を持つ対称空間では構造が同じであり、より一般に affine 対称空間 (semisimple symmetric space) でも同じ複素化を持てば不変微分作用素環の構造は同じである。[ただし、調和解析的には実形の取り方の違いは大きい。]

したがって、以下、 $G$  を中心が有限な non-compact 型の単純リー群、 $K$  を  $G$  の極大コンパクト部分群、 $G/K$  を対応する対称空間とする。 $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0$  を対応するリー環とし、その複素化を  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  と記す。普遍包絡環の中心  $ZU(\mathfrak{g})$  および不変微分作用素環  $D(G/K)$  のそれぞれの構造はよく分かっているので、それを復習する。

$\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}$  の Cartan subalgebra とし、 $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  を対応する Weyl group とする。 $S(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$  を  $\mathfrak{h}$  上の対称代数、 $I(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})^W$  をその Weyl group invariant の成す部分代数とする。 $ZU(\mathfrak{g})$  は  $\mathbb{C}$ -algebra として、 $I(\mathfrak{h})$  と標準的に同型である。この同型を Harish-Chandra 同型という。 $\dim \mathfrak{h}$  は  $\mathfrak{g}$  の階数 (rank) と呼ばれる。 $W$  は有限鏡映群なので  $I(\mathfrak{h})$  は  $\dim \mathfrak{h}$  個の変数を持つ多項式環と  $\mathbb{C}$ -algebra として同型である。

次に、 $\mathfrak{g}_0$  の  $\mathfrak{k}_0$  の直交補空間  $\mathfrak{p}_0$  を取る。 $\mathfrak{a}_0$  を  $\mathfrak{p}_0$  の極大可換部分環とする。これは対称空間  $G/K$  の Cartan subalgebra と呼ばれ、極大な totally geodesic submanifold と対応する。 $\mathfrak{a}$  を  $\mathfrak{a}_0$  の複素化とする。 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_0$  は  $G/K$  の real rank と呼ばれる。 $\mathfrak{h}$  は適当に共役を取ることで  $\mathfrak{a}$  を含むようにできるから real rank は rank を越えないが、一般には両者は一致しない。 $W(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  を制限ルート系に対応した little Weyl group とすると  $D(G/K)$  は不変式環  $I(\mathfrak{a}) = S(\mathfrak{a})^{W(\mathfrak{a})}$  と  $\mathbb{C}$ -algebra として標準的に同型である。この同型も Harish-Chandra 同型と呼ばれる。 $I(\mathfrak{a})$  も  $\dim \mathfrak{a}$  個の変数を持つ多項式環と  $\mathbb{C}$ -algebra として同型である。

両者の関係を図式にすると

$$\begin{array}{ccc} ZU(\mathfrak{g}) & \cong & I(\mathfrak{h}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(G/K) & \cong & I(\mathfrak{a}) \end{array}$$

となる。この図の右辺の不変式環ではどちらも次数 (homogeneous degree) が意味を持つが、左辺側では 0 次以下という概念しか意味を持たない。横方向の同型は filtered algebra としての同型である。実際、左の縦方向の準同型が誘導する右の縦方向の準同型は graded algebra としての準同型ではなく、単に filtered algebra としての同型である。技術的にいえば、2 つの Harish-Chandra 同型における “ $\rho$ -shift” に違い (ズレ) があって、その部分が反映して原点が原点に写らない。志村が指摘した Helgason の誤解 (90 年代前半に修正された) もこの点に起因している。

いくつかの空間に対して  $I(\mathfrak{h})$  および  $I(\mathfrak{a})$  の生成元の次数を挙げてみよう。

$G/K$	$ZU(\mathfrak{g}) = I(\mathfrak{h})$	$D(G/K) = I(\mathfrak{a})$	
$SO(n+1)/SO(n)$	$2, 4, \dots, n$	2	$A_1$
$SO(n+1)/SO(n)$	$2, 4, \dots, n-1, (n+1)/2$	2	$A_1$
$SL(n, \mathbf{R})/SO(n)$	$2, 3, \dots, n$	$2, 3, \dots, n$	$A_{n-1}$
EIII	$2, 5, 6, 8, 9, 12$	$2, 4$	$B_2$
EIV	$2, 5, 6, 8, 9, 12$	$2, 3$	$A_2$
EVII	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$	$2, 4, 6$	$C_3$
EIX	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$	$2, 6, 8, 12$	$F_4$

最後の列は制限ルート系の型を表す。球面  $S^n = SO(n+1)/SO(n)$  については上段が  $n$  が偶数の時、下段が  $n$  が奇数の時である。 $G/K$  として non-compact type で統一するなら hyperboloid  $SO_0(n, 1)/SO(n)$  とすべきであるが、次の  $SL(n, \mathbf{R})/SO(n)$  は正定値実対称行列の全体と同型であるが、この時は split( $\mathfrak{a}_0$  が  $\mathfrak{g}_0$  の Cartan subalgebra にもなっている) ので  $I(\mathfrak{h})$  と  $I(\mathfrak{a})$  は同一である。残りの 4 つの場合がこの論文での主たる対象である。 $G$  と  $K$  のリー環を挙げておくと、

type	$\mathfrak{g}_0$	$\mathfrak{k}_0$
EIII	$\mathfrak{e}_{6(-14)}$	$\mathfrak{so}(10) \oplus \sqrt{-1}\mathbf{R}$
EIV	$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{f}_4$
EVII	$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_6 \oplus \sqrt{-1}\mathbf{R}$
EIX	$\mathfrak{e}_{8(-24)}$	$\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2)$

である。実際、

**Theorem 1** (Helgason) 既約な対称空間に対しては、ちょうど  $EIII$ ,  $EIV$ ,  $EVII$ ,  $EIX$  の4つの *type* のときに  $ZU(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{D}(G/K)$  は全射にならない。

特に、 $G$  が  $E$  型でなければ(例えば古典型ならば)全射である。 $G$  が複素であったり、real rank 1 であったりすれば、全射になることはより易しい議論で従う。全射になることの証明は易しく(ただし、分類による case analysis は必要)、上の4つの場合に全射にならないことの証明がデリケートである。 $I(\mathfrak{h}) \rightarrow I(\mathfrak{a})$  が全射であれば、 $\mathfrak{a}^*/W(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{h}^*/W$  が単射になる。対偶を考えれば、 $\mathfrak{a}^*/W(\mathfrak{a}) \rightarrow \mathfrak{h}^*/W$  が単射でなければ、問題の写像は全射にならない。

**Definition 2**  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{a}^*$  が  $W(\mathfrak{a})$ -conjugate でないのに  $\mathfrak{h}^*$  の中で  $W$ -conjugate になるとき、 $\lambda_1$  と  $\lambda_2$  は *ambiguous* であるという。

補足しておく。と  $\mathfrak{a}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$  は線形写像ではないので取り扱いに注意がいる。上記の議論をまとめると対称空間  $G/K$  が互いに ambiguous な weight を一組でも持てば、 $G/K$  に対する  $ZU(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{D}(G/K)$  は全射にならない。Vogan は、4つの場合について ambiguous weights を構成して、分類している。Helgason の 92 年の論文ではその議論を利用している。

$\lambda_1, \lambda_2$  を ambiguous weight としよう。 $\psi_1, \psi_2 \in C^\infty(G/K)$  を  $\mathbf{D}(G/K)$  の (non-zero な) 同時固有関数でその固有値が  $\lambda_1, \lambda_2$  に対応するようなものであるとする。このとき  $\psi_1 + \psi_2$  は  $\mathbf{D}(G/K)$  の同時固有関数ではないが、 $ZU(\mathfrak{g})$  の同時固有関数にはなる。言い換えると、同じ無限小指標を持つが、不変微分作用素の固有値で区別できる。

**問題 3**  $ZU(\mathfrak{g})$  の同時固有関数は、 $\mathbf{D}(G/K)$  の同時固有関数の有限個の和に書き表わせるか？

ambiguous weight に起因するいわば固有値の縮退のような現象以外に両者の差があるか、という問いである。

より基本的段階として、そもそも

**問題 4**  $\mathbf{Z}(G/K)$  を  $ZU(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbf{D}(G/K)$  の像と定義する。*subalgebra*  $\mathbf{Z}(G/K) \subset \mathbf{D}(G/K)$  を記述せよ。記述できるか？

これが reasonable な記述を持てば上記の問題 1,2,3 は系として解ける。また、 $\mathbf{Z}(G/K)$  の商体と  $\mathbf{D}(G/K)$  の商体が一致することが分かっている。有限生成性からある元  $C \in \mathbf{Z}(G/K)$  が存在して、 $\mathbf{D}(G/K)$  は局所化  $\mathbf{Z}(G/K)[1/C]$  に入ることが分かる。固有空間の情報に落とせば、 $C \neq 0$  であるような  $\mathbf{Z}(G/K)$  の固有空間は自動的に  $\mathbf{D}(G/K)$  の固有空間になることがわかる。

**問題 5**  $\mathbf{D}(G/K) \subset \mathbf{Z}(G/K)[1/C]$  となるような  $C \in \mathbf{Z}(G/K)$  を求めよ。

この  $C$  が 2 次のカシミール元の多項式で書けるのではないかという期待があったが、否定的であることが以下の結果から分かる。

### 3 結果

**Theorem 3** (*type EIII*)  $i_2, i_4 \in \mathbf{D}(G/K)$  というそれぞれ 2 次、4 次の元で、 $\mathbf{Z}(G/K)$  が次のように表示できるものが存在する。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(G/K) &= \mathbf{C}[i_2, i_4], \\ \mathbf{Z}(G/K) &= \mathbf{C}[i_2, i_2 i_4, i_4^2, i_4^3 - i_4].\end{aligned}$$

証明は、不変式環の中で像を丁寧に計算して行くことで行う。上手に変数を掃き出して行くことが必要となる。結果が分かればそれを検証する作業は比較的容易である。この定理の応用として

**Corollary 4** 与えられた  $\mathbf{D}(G/K)$ -module に  $ZU(\mathfrak{g})$  が *scalar* で作用しているとする。このとき、次のどちらかが成立している。

- (a)  $\mathbf{D}(G/K)$  も *scalar* で作用している。
- (b)  $\mathbf{Z}(G/K)$  の  $i_2$  は 0 で、 $i_2 i_4$  は 0 で、 $i_4^2$  は 1 で、 $i_4^3 - i_4$  は 0 で作用する。そして、 $\mathbf{D}(G/K)$  の  $i_2$  が 0 で、 $i_4$  が  $\pm 1$  で作用する 2 つの *submodule* の直和に分解する。

これは、ambiguous weight に対応した縮退以外には  $\mathbf{Z}(G/K)$  と  $\mathbf{D}(G/K)$  の差がないことを意味している。すなわち、(たった)一つの無限小指標を除いては  $\mathbf{D}(G/K)$  の作用は無限小指標で決まってしまう、その特定の無限小指標でも  $\mathbf{D}(G/K)$  の作用は半単純 (semisimple) であることを意味している。また、ambiguous weight がただ一組しかないことも再証明していることになる。

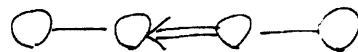
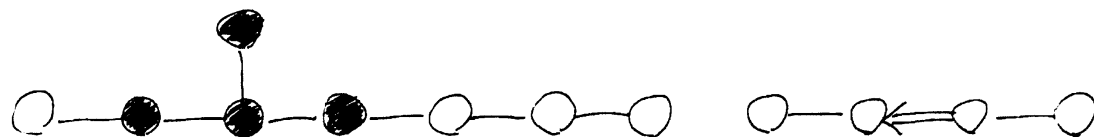
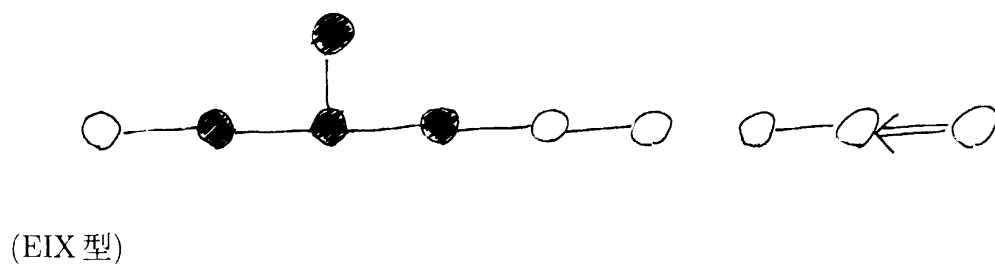
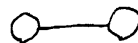
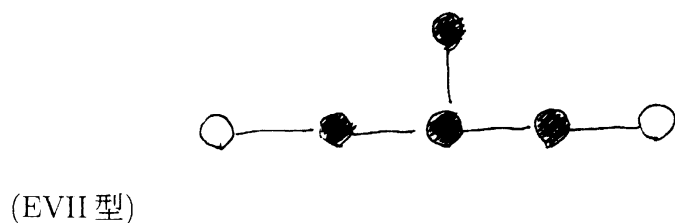
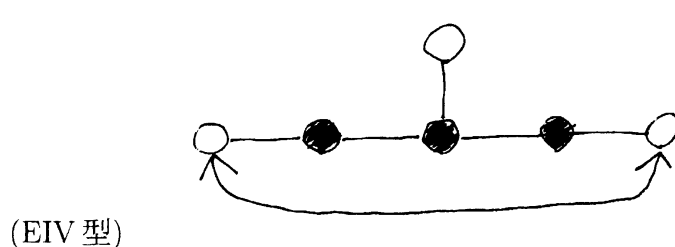
EIV 型の場合も似たような記述を持つ。

**Theorem 5** (*type EIV*)  $i_2, i_3 \in \mathbf{D}(G/K)$  というそれぞれ 2 次、3 次の元で、 $\mathbf{Z}(G/K)$  が次のように表示できるものが存在する。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(G/K) &= \mathbf{C}[i_2, i_3], \\ \mathbf{Z}(G/K) &= \mathbf{C}[i_2, i_2 i_3, i_3^2, i_3^3 - i_3].\end{aligned}$$

Corollary に当たるものも EIII 型のと同一なので繰り返さない。なお、EIII 型と EIV 型は、 $G$  の複素化が  $E_6$  型であること、real rank が 2 であることぐらいしか共通点がなく、むしろかなり様子が違う。例えば、4 つのうち、EIV 型のみ Cartan involution が外部自己同型、つまり、 $G/K$  が離散系列表現を持たない、つまり、 $K$  の階数が  $G$  の階数より小さい。したがって、EIII 型と EIV 型がある意味で類似の構造を持つことの理由は全然わからない。

佐武図形と制限ルート系の Dynkin 図形 (EIII 型)



EVII 型に移ろう。

**Theorem 6** (type EVII)  $i_2, i_4, i_6 \in \mathbf{D}(G/K)$  というそれぞれ 2 次, 4 次, 6 次の元で,  $\mathbf{Z}(G/K)$  が次のように表示できるものが存在する。

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(G/K) &= \mathbf{C}[i_2, i_4, i_6], \\ \mathbf{Z}(G/K) &= \mathbf{C}[i_2, i_6, i_4^2, i_4 i_6, i_4^3 - i_2 i_4].\end{aligned}$$

固有関数については次のようになる。

**Corollary 7** 与えられた  $\mathbf{D}(G/K)$ -module に  $\mathbf{ZU}(\mathfrak{g})$  が *scalar* で作用しているとする。このとき、次のどれかが成立している。



(c)  $\mathbf{Z}(G/K)$  の  $i_2, i_6, i_4^2, i_4i_6, i_4^3 - i_2i_4$  は 0 で作用するとき。このとき  $\mathbf{D}(G/K)$ -module として完全可約でないものが存在し、 $i_4 \in \mathbf{D}(G/K)$  の作用は *non-zero nilpotent* になる。indecomposable なものの長さは 2 である。

(b)  $\mathbf{Z}(G/K)$  の  $i_2, i_6, i_4^2 - i_2, i_4i_6, i_4^3 - i_2i_4$  が 0 で作用し、 $i_2$  の作用が *nonzero(scalar)* のとき。このとき、 $\mathbf{D}(G/K)$  が異なる固有値で作用する 2 つの submodule の直和に分解する。

(a) その他の場合は、 $\mathbf{D}(G/K)$  も *scalar* で作用している。

場合の記号 (a)(b)(c) は EIII 型の時を引き継いだ。

(c) のように、問題 3 に否定的な解答を与えるような無限小指標が存在することが、EIII, EIV 型と比べて新しい現象である。(b) の場合がちょうど ambiguous weights に対応し、(a) はその極限点に当たると考えられる。固有空間の構造は代数幾何的には自然に見える。問題 5 が否定的であることも定理からわかる。

最後の EIX 型はより複雑である。

**Theorem 8 (type IX)** 与えられた  $\mathbf{D}(G/K)$ -module に  $ZU(\mathfrak{g})$  が *scalar* で作用しているとする。このとき、次のいずれかが成立している。

(i)  $i_2$  が *nonzero(scalar)* で作用するとき。このとき、type EVII の (a)(b)(c) に当たることが起きる。それぞれのパラメータの次元は 4, 2, 1 である。

(ii)  $i_2$  が *zero* で作用し、 $i_8$  が *non-zero(scalar)* で作用する時。このとき  $\mathbf{D}(G/K)$  も *scalar* で作用する。そのようなパラメータの次元は 3 である。

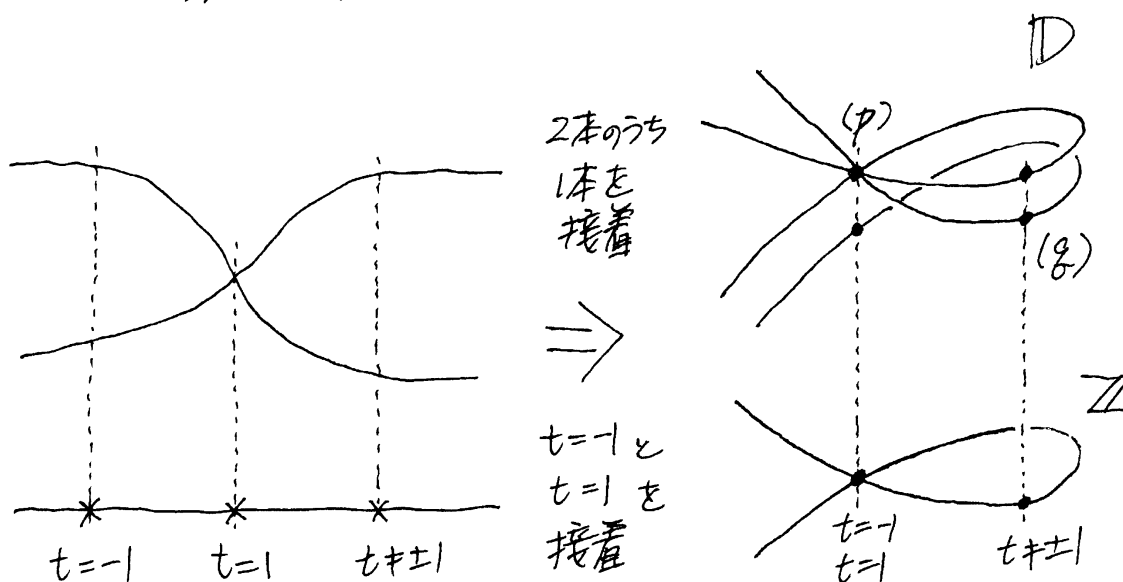
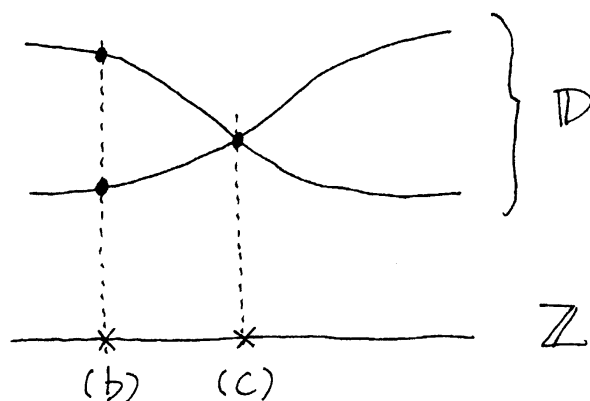
(iii)  $i_2, i_8$  が *zero* で作用する時。3 つの場合に分かれる。

(p)  $i_2, i_8, i_{12}, i_6^2(i_6 + 4)$  が *zero* で作用する時。このとき  $i_6^2 = 0$  と  $i_6 = -4$  の 2 つの submodule の直和に分解する。前者は一般に *non-semisimple* で indecomposable なものの長さが 2 という (c) と同じ型のもの。後者は  $\mathbf{D}(G/K)$  が *scalar* で作用する (a) と同じ型のものである。この 2 つが組合わさって出て来ている。

(q) scalar  $t \in \mathbf{C}$ ,  $t \neq \pm 1$  に対して、 $t_2, i_8, i_{12} - (t^2 - 1), i_6^2 + 2(t + 1)i_6 + t^2 - 1$  が 0 で作用するとき。このとき、(b) と同じ型で、 $\mathbf{D}(G/K)$  が異なる固有値で作用する 2 つの submodule の直和に分解する。

(r) その他の時。 $\mathbf{D}(G/K)$  も *scalar* で作用する。

どのような感じなのか図示する。



EIX 型の ambiguous weights に関して、観察を述べておく。上の  $i_2, i_8, i_{12}, i_6 \in \mathbf{D}(G/K)$  とは別の生成系  $i_2, i_8, i_{12}, i_6 \in \mathbf{D}(G/K)$  を選ぶ。  $i_8 - i_2 i_6^2, i_{12}$  が 0 で作用し、  $i_2$  が non-zero で作用するような weight に制限して考える。別のパラメータ  $(s, t) \in \mathbf{C}$  を用意して、

$$\begin{cases} i_2 = st - 1, \\ i_6 = s^3 - t^3 \end{cases}$$

と置く。この時、  $\mathbf{D}(G/K)$  に対応する algebra は  $\mathbf{C}[st, s^3 - t^3, 1/(st - 1)]$ ,  $\mathbf{Z}(G/K)$  に対応する algebra は  $\mathbf{C}[st, (s^3 - t^3)^2, 1/(st - 1)]$  となる。局所化

$(st-1)^{-1}$  の分を除くと、 $\mathbf{Z}(G/K)$  は

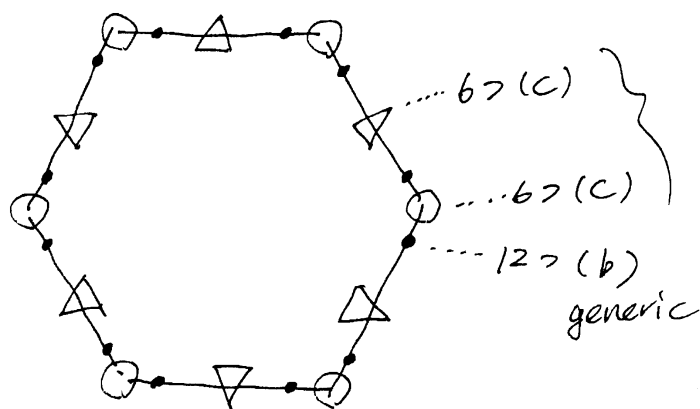
$$(s, t) \mapsto (t, s), (s, t) \mapsto (\zeta_6 s, \zeta_6^{-1} t) \mapsto (s, t)$$

の生成する位数 12 の 2 面体群に関する不変式環  $\mathbf{C}[st, (s^3 - t^3)^2]$  であり、 $\mathbf{D}(G/K)$  はその指数 2 の部分群に関する不変式環  $\mathbf{C}[st, s^3 - t^3]$  である。ルート系の言葉でいえば、前者が  $G_2$ , 後者が  $A_2$  に対応している。

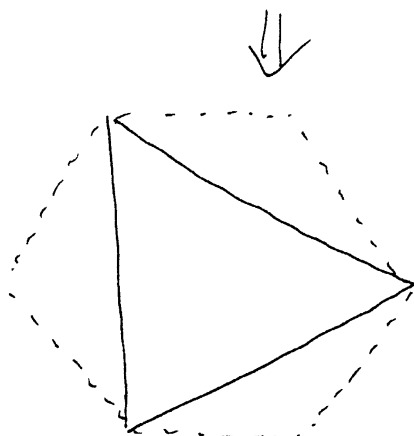
$$\begin{array}{ccccccc} ZU(\mathfrak{g}) & \dots & E_8 & \dots & G_2 & \dots & \mathbf{C}[st, s^3 - t^3, 1/(st-1)] \\ \mathbf{D}(G/K) & \dots & F_4 & \dots & A_2 & \dots & \mathbf{C}[st, (s^3 - t^3)^2, 1/(st-1)]. \end{array}$$

対称空間  $E_8/F_4$  の中で非対称空間  $G_2/A_2$  的な部分多様体の構造が見えてそれが使えると興味深いがこの現象の意味はまだわからない。

$W(G_2)$



$W(A_2)$



## References

- [1] F. Bien, D-modules and spherical representations, Mathematical Notes **39**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [2] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces, Academic Press, 1978.
- [3] S. Helgason, Some results on invariant differential operators on symmetric spaces, Amer. J. Math. **114**(1992) 789–811.
- [4] J.S. Huang, Invariant differential operators and eigenspace representations on an affine symmetric space, Ann. of Math. (2) **154** (2001), no. 3, 703–737.
- [5] J.S.Huang, T. Oshima and N. Wallach, Dimensions of spaces of generalized spherical functions, Amer. J. Math. **118**(1996) 637–652.
- [6] C.Y. Lee, Invariant polynomials of Weyl groups and applications to the centers of universal enveloping algebras, Can. J. Math. **26**(1974) 583–592.
- [7] M.L. Mehta, Basic sets of invariant polynomials for finite reflection groups, Comm. in Alg. **16**(1988) 1083–1098.
- [8] H. Ochiai, Eigenspace representation of Riemannian symmetric spaces of exceptional type, preprint.

e-mail: ochiai@math.nagoya-u.ac.jp